1/12/2016 — Μαθημα 14º

Εισαγωγη στις Διαφορικες εξισωσεις:

Άσκηση Β-29: (Αλυτες)

$\sum_{k=0}^{5} y^{(k)}=0 \quad // \; y^{(5)}+y^{(4)}+\dots+y'+y=0$

1) Να βρεθει ενα βασικό συνολο πραγματικων λυσεων.

2) Το συνολο των (πραγματικων) λυσεων που $\to 0$ (για $x\to\infty$) ειναι γραμμικος χωρος + βαση.

Λυση:

1) $\varphi(\lambda)=\underbrace{\lambda^5+\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1}_{\frac{\lambda^6-1}{\lambda-1}}=0$

$\lambda^6-1,\ \lambda\neq 1 \Rightarrow (\lambda^3-1)(\lambda^3+1) \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$.

$\lambda_1=-1,\quad \lambda_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_{4,5}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

Β.Σ.Π.Λ. $=\left\{e^{-x},\ e^{-1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right),\ e^{-1/2x}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right),\ e^{1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right),\ e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)\right\}$ $\nearrow \pm\infty$

2) Έστω ότι υπαρχει λυση $y(x)\to 0$ και $y(x)=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+c_4y_4+c_5y_5$

Θα πρεπει $\lim_{x\to\infty} c_4e^{1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)+c_5e^{1/2x}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)=0$

Θα πρεπει να αποδειξω ότι $c_4=c_5=0$

Θεωρώ την ακολουθια $x_\nu=\frac{2}{\sqrt3}2\nu\pi \xrightarrow{\nu\to\infty} +\infty$ και $\lim_{\nu\to\infty} y(x_\nu)=0 \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} c_4 e^{1/2x_\nu}\cdot 1=0 \Rightarrow c_4=0$ ($e^{1/2x_\nu}\nearrow +\infty$)

(ομοια και για c_5)

Επομενως για $y(x)\to 0$ θα ειναι $y(x)=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$

Οι λυσεις y με $y(x)\to 0$ αποτελουν γραμμικό χώρο

Πραγματι, αν $y_1(x)\to 0$ και $y_2(x)\to 0$ (y_1,y_2 λυσεις) τοτε $\forall k,\lambda\in\mathbb{R}$:

$\lim_{x\to\infty}[ky_1+\lambda y_2](x)=0$ και $y=ky_1+\lambda y_2$ λυση της (Ε)

Βαση: $\left\{e^{-x},\ e^{-1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right),\ e^{-1/2x}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)\right\}$

Άσκηση: $y''+y=b(x)$

Αν $\int_1^\infty |b(s)|ds<\infty \Rightarrow$ καθε λυση ειναι φραγμενη στο $[1,+\infty)$.

Λυση:

$y''+y=0$

Β.Σ.Λ. $=\{\cos x,\sin x\}$

$W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$

$W_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ 1 & \cos x\end{vmatrix}=-\sin x,\quad W_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & 1\end{vmatrix}=\cos x$

$y_p=\cos x\int_1^x \frac{-\sin(s)}{1}b(s)ds+\sin x\int_1^x\frac{\cos(s)}{1}b(s)ds=$

$=\int_1^x[-\cos x\sin s]b(s)\,ds+\int_1^x \sin x\cos s\, b(s)\,ds=\int_1^x b(s)\underbrace{[\sin x\cos s-\cos x\sin s]}_{\sin(x-s)}ds$

$|y_p(x)|=\left|\int_1^x\sin(x-s)b(s)ds\right|\le\int_1^x|\sin(x-s)||b(s)|ds,\ x\ge 1 \le\int_1^x|b(s)|ds\le M$

$|y(x)|=|c_1\cos x+c_2\sin x+y_p(x)|\le|c_1|+|c_2|+M$.

Άσκηση:

$y_1(x)=1+e^{x^2}$, $y_2(x)=1+xe^{x^2}$ $y_3(x)=(x+1)e^{x^2}+1$ είναι λύσεις μιας μη ομογενούς γ.δ.ε. β' τάξης.

(i) Να επιλυθεί.

(ii) Να βρεθεί η λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0)=1$
$y'(0)=2$.

Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} y_2-y_1 : \text{λυση της ομογενους} \\ y_3-y_2 : \text{λυση της ομογενους} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e^{x^2}(x-1) : \text{λυσεις της ομογενους} \\ e^{x^2} \end{array}$$

$W(e^{x^2}(x-1), e^{x^2})\neq 0$ ή $c_1e^{x^2}(x-1)+c_2e^{x^2}=0, x\in\mathbb{R} \Rightarrow c_1x-c_1+c_2=0 \Rightarrow \boxed{c_1=c_2=0}$ γραμ. ανεξαρ.

Άρα $y(x)=c_1e^{x^2}+c_2e^{x^2}(x-1)+1+e^{x^2}$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ:

$a_ny^{n}+\dots+a_1y'+a_0y$, $a_i\in\mathbb{R}$ → χωρις Β.Σ.Λ.
→ $b(x)$: ειδικης μορφης

① $b(x)$: πολυώνυμο κ-βαθμου

$a_m\neq 0$, $a_{m-1}=\dots=a_0=0$

θετω $y_\mu^{(k)}(x)=c_kx^k+\dots+c_1x+c_0$

π.χ. $y^{(4)}+y''=x^3+1$ ①

$y_\mu''(x)=ax^3+bx^2+\gamma x+\delta$

Άρα $3\cdot 2ax+2b+ax^3+bx^2+\gamma x+\delta=x^3+1 \Rightarrow$

$ax^3+bx^2+(6a+\gamma)x+2b+\delta=x^3+1\Rightarrow\dots$

2) $y^{(4)}-y=x^2$

$y_\mu(x)=ax^2+bx+\gamma \Rightarrow -ax^2-bx-\gamma=x^2\to y(x)=-x^2$.

3) $y''-5y'+6y=x^2+3$

$y(x)=ax^2+bx+\gamma$, $2a-5(2ax+b)+6(ax^3+bx+\gamma)=x^2+3$ (...)

II) $b(x)=P(x)e^{-\lambda x}$: θετω $y=ze^{-\lambda x}$

π.χ. $y''-y'-2y=4e^{-x}$, θετω $y=ze^{-x}$

$(z''\cancel{e^{-x}}+2z'(\cancel{-1})e^{-x}+z\cancel{e^{-x}})-(z'\cancel{e^{-x}}-z\cancel{e^{-x}})-2z\cancel{e^{-x}}=4\cancel{e^{-x}}\Rightarrow$

$z''-2z'+z-z'+z-2z=4 \Rightarrow z''-3z'+\cancel{2z}-\cancel{2z}=4 \Rightarrow z''-3z'=4$

θετω $z'=0\Rightarrow z'=-\frac{4}{3} \Rightarrow z(x)=-\frac{4}{3}x+c$, Άρα $\boxed{y_\mu(x)=\left(-\frac{4}{3}x+c\right)e^{-x}}$

Άσκηση:

Π.Α.Τ. $y''-y'-2y=4e^{-x}$, $y(0)=\alpha$, $y'(0)=\beta$ $\Big\}$ Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη (επί των α,β) ώστε η λύση y_0 του Π.Α.Τ. να είναι φραγμένη στο $[0,+\infty)$.

$P(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2 \to 2, -1$ Β.Σ.Λ. $=\{e^{-x}, e^{2x}\}$

$y_p(x)=-\frac{4}{3}xe^{-x}$

$$\boxed{y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-\frac{4}{3}xe^{-x},\ x\in\mathbb{R}}$$

$y'(x)=-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x}-\frac{4}{3}e^{-x}+\frac{4}{3}xe^{-x}$.

$\alpha=y(0)=c_1+c_2 \Rightarrow c_1+c_2=\alpha$

$\beta=y'(0)=-c_1+c_2-\frac{4}{3}=\beta$ $\Big\}\Rightarrow$ $c_1=\frac{1}{3}(2\alpha+\beta-\frac{4}{3})$, $c_2=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\frac{4}{3})$

Άρα $y_0(x)=\frac{1}{3}(2\alpha+\beta-\frac{4}{3})\underbrace{e^{-x}}_{x\to+\infty\ \to 0}+\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\frac{4}{3})e^{x}-\frac{4}{3}\underbrace{xe^{-x}}_{x\to+\infty\ \to 0}$, $x\in\mathbb{R}$

Άρα ικανή και αναγκαία συνθήκη για $y(x)\to 0$ είναι $\alpha+\beta+\frac{4}{3}=0$

(III) $b(x)=P(x)e^{-6x}\begin{pmatrix}\sin(7x)\\ \cos(7x)\end{pmatrix}$

Θεωρούμε την εξίσωση $L(y)=P(x)e^{(-6+7)x}$.

$L(y)-P(x)e^{-6x}(\cos 7x+i\sin 7x)=0$

Αν έχω $\cos 7x$ κρατώ το πραγματικό μέρος

Αν έχω $\sin(7x)$ κρατώ το φανταστικό μέρος

Π.χ. $y''-2y'+y=xe^{-x}\cos(2x)$ // Β.Σ.Λ. $=\{e^x, xe^x\}$

Θεωρώ την εξίσωση $y''-2y'+y=xe^{(-1+2i)x}$

Θέτω $y=ze^{(-1+2i)x}$

Οπότε: $z''\cancel{e^{(-1+2i)x}}+2z'(-1+2i)\cancel{e^{(-1+2i)x}}+z(-1+2i)^2\cancel{e^{(-1+2i)x}}-2[z'\cancel{e^{(-1+2i)x}}+(-1+2i)z\cancel{e^{(-1+2i)x}}]+z\cancel{e^{(-1+2i)x}}=x\cancel{e^{(-1+2i)x}}$

$\Rightarrow z''+2z'(-1+2i)+z(1-4-4i)-2[z'+(-1+2i)z]+z=x \Rightarrow$

$\Rightarrow z''+z'[-2+4i-2]+z[-3-4i-2(-1+2i)+1]=x \Rightarrow z''+4(-1+i)z'-8iz=x$. Θέτω $z=\alpha x+\beta$.

και προκύπτει $z_p(x)=\frac{1}{8}ix+\frac{1}{16}(-1+i)$

$y(x)=\mathrm{Re}[ze^{-(1+2i)x}]=\mathrm{Re}\{[\frac{1}{8}ix+\frac{1}{16}(-1+i)]e^{-x}(\cos 2x+i\sin 2x)\}=$

$=-e^{-x}\mathrm{Re}[-\frac{1}{16}+(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}x)i][\cos 2x+i\sin 2x]$

$$\boxed{y_p(x)=-e^{-x}\left[-\frac{1}{16}\cos 2x-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}x\right)\sin 2x\right]}$$

Άσκηση:

$y'' + y = 3x^2 - 4\sin x \quad , \; y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

Λύση:

$y'' + y = 3x^2 \quad \| \quad y'' + y = -4\sin x$

$\hookrightarrow y_1 \qquad \hookrightarrow y_2$

Άρα $y = y_1 + y_2$.

$y_1^p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

$\Downarrow$

$y_1^p = 3x^2 - 6$

$y'' + y = -4e^{ix}$ θέτω $y = ze^{ix}$

$z''\cancel{e^{ix}} + 2z'i\cancel{e^{ix}} + (-1)\cancel{e^{ix}} z + z\cancel{e^{ix}} = -4\cancel{e^{ix}} \Rightarrow$

$z'' + 2iz' - z + z = -4 \Rightarrow z'' + 2iz' = \cancel{z} -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow z' = \frac{-4}{2i} = 2i$

$\boxed{y_2^p = 2x\cos x}$

Επομένως μια μερική λύση της $y^2 + y = 3x^3 - 4\sin x$, θα είναι: $y_p(x) = 3x^2 - 6x + 2x\cos x$

Β.Σ.Λ. της $(E_0) = \{\cos x, \sin x\}$.

Όλες οι λύσεις θα δίνονται από $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + y_p(x)$